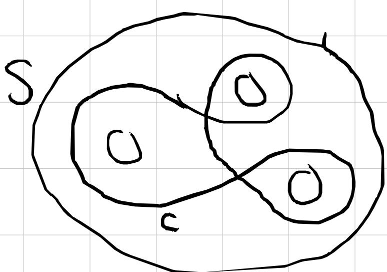
Fonctions "volume" pour les courbes non simples

Type topologique local : S surface à bord remplie par une courbe fermée c



- Courbe fermée γ dans S^g, type topologique local $(S(\gamma), \gamma)$ où $S(\gamma)$ surface remplie par γ.

$T = [S, c]$ type topologique local fixé

(S, c) représentant fixé, $g = g(S)$ genre

n composantes de bord

$$|\chi_S| = 2g - 2 + n$$

On cherche à calculer des intégrales de la forme

$$\mathbb{E}_g^{WP}\Big(\sum_{\substack{\gamma\in\mathcal{P}(X)\\ \gamma\in T}} F(\ell_X(\gamma))\Big)$$

où supp $F \subset [0,L]$, L fixé ou $L = L(g)$
(typiquement $L = A\log g$)

$$\frac{1}{V_g}\,\mathbb{E}_g^{WP}\Big(\sum_{\substack{\gamma\in\mathcal{P}(X)\\ \gamma\in T}} F(\ell_X(\gamma))\Big) =$$

$$= \sum_{\substack{R \text{ réalis.}\\ \text{de } \xi \text{ dans } S^g}} \int_{\substack{\vec{x}=(x_1,\dots,x_n)\\ >0}} V_R(\vec{x}) \prod_{i=1}^{n} x_i\, dx_i$$

$\downarrow$ vol. de l'espace des modules sur $S^g \setminus \xi$.

$$\underbrace{\times \int_{\mathcal{M}_{\vec{x}}(\xi)} \sum_{\substack{\gamma\in\mathcal{P}(\xi)\\ \gamma\in \mathrm{orb}(c)}} F(\ell_Y(\gamma))\, d\mu^{WP}(Y)}_{= \frac{1}{m(\tau)} \int_{\mathcal{T}_{\vec{x}}(\xi)} F(\ell_Y(c))\, d\mu^{WP}(Y)}$$

$$= \frac{1}{V_g} \int_0^{+\infty} F(\ell)\, \underbrace{V_g^T(L)}\, d\ell$$

densité : fonction "volume" pour le type topologique local en genre g.

<u>Lemme</u>: Si $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ouvert connexe, λ_Ω = mesure de Lebesgue, $v : \Omega \to \mathbb{R}^+$ continue,

$f : \Omega \to \mathbb{R}^+$ réelle analytique non constante.

On suppose $\int \mathbb{1}_{[0,L]} (f(x))\, v(x)\, d\lambda(x) < \infty \ \forall L$.

Alors l'image de $v(x)\, d\lambda(x)$ par f admet une densité.

Dans notre cas, $\Omega = \{ \vec{x} = (x_1, \dots x_n),\ \gamma \in \mathcal{T}_{\vec{x}}(\xi) \}$,

$f : (\vec{x}, \gamma) \mapsto \ell_\gamma(c)$.

Bornes supérieures :

1) $\prod x_i$: $$\frac{V_R(\vec{x})}{V_g} \leq \frac{V_R}{V_g} e^{\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{2}}$$

$$= \frac{V_R}{V_g} e^{\frac{\ell(\partial \xi)}{2}}$$

2) $\int d\vec{x}\, \mu^{wp}\left(\{Y : \ell_Y(c) \leq L\}\right)$

$\leq O\left(L^{3|\chi_\xi|}\right)$

On utilise le fait que si c remplit ξ et si $\ell_Y(c) \leq L$, alors on peut trouver des coordonnées de Fenchel-Nielsen $\leq 5L + 100$

3) Pour toute surface hyperbolique X,

$\#\{\gamma \text{ geod. fermée}, \ell_X(\gamma) \leq L\} \leq C\,|\chi(X)|\, e^L$

(cf Buser 2010)

Par exemple, $\left|\sum_{\gamma \in \mathcal{P}(X)} F(\ell_Y(\gamma))\right| \leq \|F\|_\infty\, e^L$

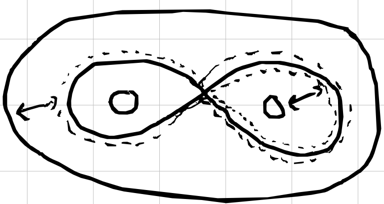
4) Borne sur $\sum x_i = \ell(\partial \xi)$

<u>Lemme</u>: Si c remplit ξ alors $\forall Y \in \tilde{T}_{\vec{x}}(\xi)$,

$\sum x_i \leq 2\,\ell_Y(c)$.

<u>Preuve</u>: pour chaque composante de bord on peut trouver une courbe dans la même classe d'homotopie libre qui est obtenue en concaténant des "portions simples" de c.

ex :



chaque portion simple apparaît au plus pour 2 composantes de bord. On conclut en utilisant le fait que les composantes de bord sont des géodésiques, donc minimisent la longueur. □

Propi Si F est à support dans $[0, L]$,

a) $$\left| \int F(\ell) V_g^T(\ell) \, d\ell \right| = O\left(\frac{L^{3|\chi_\xi|}}{g^{|\chi_\xi|}} e^{L} \|F\|_\infty \right)$$

(on utilise $\dfrac{V_R}{V_g} = O\left(\dfrac{1}{g^{|\chi_\xi|}}\right)$)

b) à ξ fixé, $$\sum_{\substack{T \text{ qui} \\ \text{remplissent } \xi}} \left| \int F(\ell) V_g^T(\ell) \, d\ell \right|$$

$$= O_\xi\left(\frac{L^{3|\chi_\xi|} e^{2L} \|F\|_\infty}{g^{|\chi_\xi|}} \right)$$

Optimisation de ces bornes

(utile seulement si $L = L(g) \to \infty$)

Borne 4 : une portion simple de c est dite "essentielle" si elle n'est pas dans le bord d'une composante contractile de $S \setminus c$.

on peut remplacer le lemme par

$$\sum x_i \leq \ell_Y(c) + \sum_{\substack{I \text{ portion} \\ \text{simple essentielle}}} \ell_Y(c)$$

Défi : c remplit doublement S si c n'a pas de portion simple essentielle.

ex.  $\sum x_i \leq \ell_Y(c)$

$$\sum_{\gamma \in \mathcal{P}(X)} F(\ell_Y(\gamma)) \leq C(\chi(X)) \sum_{n=0}^{+\infty} \|F(x) e^{-x}\|_{L^\infty([n,n+1[)}$$

$$\leq C(\chi(X)) \|F(x) e^{-x}\|_{L^\infty} \times L$$

(dans la dernière inégalité on a utilisé le fait que F est à support dans $[0, L]$)

Borne de comptage de Wu-Xue

S surface à bord, Y métrique hyperbolique sur S à bord géodésique.

$$\#\{\gamma \text{ géod. périodiques qui remplissent } S,\ \ell_Y(\gamma) \leq L\} \leq C(\varepsilon, \chi(S))\, e^{L - (\frac{1}{2} - \varepsilon)\ell(\partial S)}$$

Ça donne les améliorations suivantes :

$$\left| \int F(\ell)\, V_g^T(\ell)\, d\ell \right| = O\left(\frac{L^{3|\chi_S|+1} \| F(x) e^{x} \|_\infty}{g^{|\chi_S|}} \right)$$

(et même $\| F(x) e^{\frac{x}{2}} \|_\infty$ si c remplit doublement S).

$$\sum_{\substack{T \text{ qui} \\ \text{remplit doublement} \\ S}} \left| \int F(\ell)\, V_g^T(\ell)\, d\ell \right| = O_S\left(\frac{L^{3|\chi_S|} \| F(x) e^{x} \|_\infty\, e^{\varepsilon L}}{g^{\chi_S}} \right)$$

Développements asymptotiques

Mirzakhani-Zograf + Anantharaman-Monk :

$$\prod_{i=1}^{n} x_i \frac{V_R(\vec{x})}{V_g} = \sum_{k=|\chi_S|}^{K} \frac{f_k(\vec{x})}{g^k} + O\left(\frac{\|x\|^{3k+1} e^{\sum \frac{x_i}{2}}}{g^{k+1}}\right)$$

le terme dominant pour $k = \chi_S$, $f_k(\vec{x}) = 2^n \prod_{i=1}^{n} \sinh\left(\frac{x_i}{2}\right)$

Conséquence :

$$\int F(\ell) V_g^T(\ell) d\ell = \sum_{k=|\chi_S|}^{K} \frac{1}{g^k} \int F(\ell) c_k^T(\ell) d\ell$$
$$+ O\left(\frac{L^{3k+1+3|\chi_S|}}{g^{k+1}} \|F(x) e^{x}\|_\infty\right)$$

et $c_k^T(\ell)$ est obtenu en remplaçant

$$\prod x_i \frac{V_R(\vec{x})}{V_g} \text{ par } f_k(\vec{x}) \text{ sous l'intégrale.}$$

→ on montrera que ce sont des fonctions de Friedman-Ramanujan

Prop: On fixe L, k. $F = \mathbb{1}_{[0,L]}$

$$\mathbb{E}_g^{WP}\Big(\#\text{ géod. périodiques } \gamma \text{ de longueur } \leq L \text{ t.q. } |\chi(S(\gamma))| = k\Big) = O\left(\frac{L^{3k} e^{(1+\varepsilon)L}}{g^k}\right)$$

- L fixé, $k \geq 1$: tend vers 0
- $L = A \log g$, $k = \lceil 2A \rceil + 1$: tend aussi vers 0.

Corollaire: pour ces choix de L et k, $\mathbb{P}(\exists$ une géod. γ de longueur $\leq L$ tq $|\chi(S(\gamma))| \geq k) = O\left(\frac{L^{3k} e^{(1+\varepsilon)L}}{g^k}\right) \longrightarrow 0$

Thm (Mirzakhani - Petri) : $a < b$.

$N_{[a,b]}$ = nb de géod. périodiques primitives orientées γ t.q. $\ell(\gamma) \in [a,b]$

$$N_{[a,b]} \xrightarrow{(d)} \mathcal{P}(\mu_{[a,b]}), \text{ où } \mu_{[a,b]} = 4 \int_a^b \frac{\sinh^2\left(\frac{\ell}{2}\right)}{\ell} \, d\ell.$$

Preuve: méthode des moments factoriels

$$N^{(r)} = N(N-1)\cdots(N-r+1)$$

Prop: $\mathbb{E}[N^{(r)}] \xrightarrow[g\to\infty]{} \mu^r \quad \forall r$, et μ^r est le r-ème moment factoriel de $\mathcal{P}(\mu)$ (loi de Poisson)

$\mathbb{E}_g^{WP}(N^{(r)}) = \mathbb{E}[$nb de r-uplets $(\gamma_1, \dots \gamma_r)$ formés de géod. de longueurs dans $[a,b]]$

$= \mathbb{E}[$nb de r-uplets $(\gamma_1, \dots \gamma)$ non séparants formés de géod. simples & 2 à 2 disjointes$] + O\left(\frac{1}{g}\right)$.

$$= \int \prod \mathbb{1}_{[a,b]}(l_i) \underbrace{\frac{V_{g-r,2r}(l_1, l_1, l_2, l_2, \dots, l_r, l_r)}{V_g}}_{2 \prod_{i=1}^{r} \left(\frac{\sinh\left(\frac{l_i}{2}\right)}{\frac{l_i}{2}}\right)^2} \prod_{i=1}^{r} l_i \, dl_i + O\left(\frac{1}{g}\right)$$

(Mirzakhani-Petri)

$$= \int 2^{2r} \prod \frac{\sinh^2\left(\frac{l_i}{2}\right)}{l_i} \, dl_i + O\left(\frac{1}{g}\right) = \mu^r_{[a,b]} + O\left(\frac{1}{g}\right)$$

<u>NB:</u> estimée de Basmajian :

$$i(\gamma,\gamma) \leq 2e^{2\ell(\gamma)}$$

nb d'auto-intersections

$\rightarrow$ Si $\ell(\gamma) \leq b$, on a un nb fini d'auto-intersections.

Estimée de Mirzakhani sur la constante de Cheeger

X surface. $$h(X) = \inf_{\substack{\text{ss-variété } E \text{ compacte} \\ \text{de dim 1 } C^1 \text{ par} \\ \text{morceaux tq } X \setminus E = X_1 \sqcup X_2}} \left(\frac{\ell(E)}{\min(\mathrm{Aire}(X_1), \mathrm{Aire}(X_2))} \right)$$

<u>Note:</u> on peut supposer X_1 et X_2 connexes.

<u>Thm</u> (Mirzakhani) : $\exists C > 0$ tq

$$\mathbb{P}(h(X) \leq C) \xrightarrow[g \to \infty]{} 0$$

et $\exists C'$, $\mathbb{P}_g^{WP}(\lambda_1(X) \leq C') \xrightarrow[g \to \infty]{} 0$.

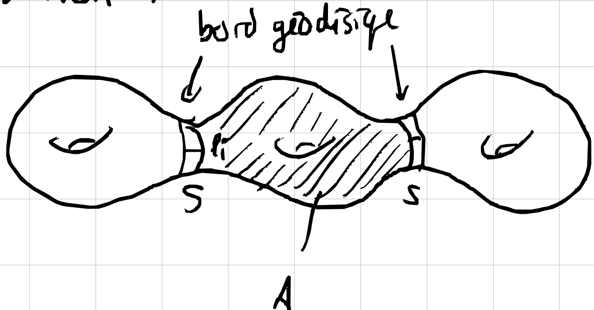
Cste de Cheeger géodésique

$H_i(X)$ = m̂ définition mais E est une réunion de géod. fermées simples et $i = |\chi(X_1)| \leq |\chi(X_2)|$ pour $i \leq g-1$.

$$H(X) = \min_{i \leq g-1} (H_i(X)).$$

$$\underbrace{h(X) \leq H(X)}_{\text{facile}} \text{ et } \underbrace{h(X) \geq \frac{H(X)}{1+H(X)}}_{\text{csq de résultats de Hass-Morgan et Adams-Morgan}}$$

L'inf dans $h(X)$ est atteint et le minimiseur a la forme suivante :



$$h(X) = \frac{(\sum \ell_i)\cosh(s)}{A + (\sum \ell_i)\sinh(s)} \geq \frac{H(X)\cosh(s)}{1 + H(X)\sinh(s)} \geq \frac{H(X)}{1+H(X)}$$

Fixons i, k entiers.

$\mathbb{E}[\#\{(\gamma_1, \dots, \gamma_k)$ multigéodésiques, $\sum \ell(\gamma_i) \leq L$, qui séparent S^g en 2 morceaux X_1 et X_2 tq $|\chi(X_1)| = i$ et $|\chi(X_2)| = 2g-2-i\}] \xrightarrow[g\to\infty]{} 0$

(si $L = c_i$ avec c petit).

X_1 a genre g_1, k composantes de bord
X_2 a genre g_2, k composantes de bord

$\longrightarrow \quad 2g_1 - 2 + k = i, \quad 2g_2 - 2 + k = 2g - 2 - i$

$k \leq i + 2$

$$\mathbb{E}[(\dots)] = \frac{1}{V_g} \frac{1}{k!} \int_{\sum l_i \leq L} V_{g_1,k}(l_1, \dots, l_k) V_{g_2,k}(l_1, \dots, l_k) \prod_{i=1}^{k} l_i \, dl_i$$

$$\leq \frac{V_{g_1,k} V_{g_2,k}}{V_g \, k!} \int_{\sum l_i \leq L} e^{\sum l_i} \, dl_i$$

$$\leq \frac{V_{g_1,k} V_{g_2,k}}{V_g} e^{L} \frac{L^k}{k!}$$

$V_{g_1,k} \leq W_i$ $\qquad W_r = V_{\frac{r}{2}+1,0}$ ou $V_{\frac{r+1}{2},1}$

$W_r \sim r^r \times$ exponentielle

$\mathbb{P}(\exists\, i \leq g-1, \exists$ multigéod. de longueur $\leq Ci$ qui sépare en 2 morceaux de caract. d'Euler $-i$ et $i-2g+2)$

$$\leq \sum_{i=1}^{g-1} e^{2Ci} \underbrace{\frac{W_i W_{2g-2-i}}{W_{2g-2}}}_{\frac{i^i (2g-2-i)^{2g-2-i}}{(2g-2)^{2g-2}}}$$

Pour $x \in [0,1]$, entropie $\mathrm{Ent}(x) = -x\ln(x) - (1-x)\ln(1-x)$

$$\to \mathbb{P}(\exists i, \exists \text{ multigéod. } ---) \leq \sum_{i=1}^{g-1} e^{2Ci}\, e^{-(2g-2)\mathrm{Ent}\left(\frac{i}{2g-2}\right)}$$

$$= \sum_{i=1}^{g-1} \exp\left((2g-2)\left[C\frac{i}{2g-2} - \mathrm{Ent}\left(\frac{i}{2g-2}\right)\right]\right)$$

Si $C=0$ c'est le terme $i=1$ qui donne la contrib. dominante

$\to$ reste vrai si C est assez petit.